Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135
УДК 517.927.4

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка

Гусен Эльдерханович АБДУРАГИМОВ
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а

Аннотация. В настоящей статье рассматривается двухточечная краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка со слабой нелинейностью на отрезке $[0,1]$ с нулевыми условиями Дирихле на границе. Краевая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнения в пространстве непрерывных функций. С помощью специальных топологических средств (использующих геометрические свойства конусов в пространстве непрерывных функций, утверждения о неподвижных точках монотонных и вогнутых операторов) доказано существование единственного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий, обеспечивающую однозначную разрешимость поставленной задачи. Полученные результаты являются продолжением исследований автора (см. [Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2021, т. 194, с. 3–7]), посвященных вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, конус, конусный отрезок

Для цитирования: *Абдурагимов Г.Э.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 129–135. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of fractional order

Gusen E. ABDURAGIMOV
Dagestan State University
43a M. Hajiyev St., Makhachkala 367025, Russian Federation

Abstract. In this article, we consider a two-point boundary value problem for a nonlinear functional differential equation of fractional order with weak nonlinearity on the interval $[0,1]$ with zero Dirichlet conditions on the boundary. The boundary value problem is reduced to an equivalent integral equation in the space of continuous functions. Using special topological tools (using the geometric properties of cones in the space of continuous functions, statements about fixed points of monotone and concave operators), the existence of a unique positive solution to the problem under consideration is proved. An example is given that illustrates the fulfillment of sufficient conditions that ensure the unique solvability of the problem. The results obtained are a continuation of the author's research (see [Results of science and technology. Ser. Modern mat. and her appl. Subject. review, 2021, vol. 194, pp. 3–7]) devoted to the existence and uniqueness of positive solutions of boundary value problems for non-linear functional differential equations.

Keywords: functional differential equation of fractional order, positive solution, boundary value, cone, tapered segment

Mathematics Subject Classification: 26A33, 34B18, 34K10.

For citation: Abduragimov G.E. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya krayevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka [On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of fractional order]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 129–135. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Вопросам исследования разрешимости краевых задач для нелинейных дробно-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое число работ. Отметим близкие по тематике данному исследованию работы [1–14], в которых рассмотрены вопросы существования положительных решений, их свойства, асимптотики и т. д., причем естественным инструментом исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании техники нелинейного анализа (теоремы о неподвижной точке, теорема Лере–Шаудера и др.). Однако работ, посвященных непосредственно вопросам существования единственного положительного решения краевой задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка, мало. Из цитированных выше исследований условия единственности предложены только в статье [2]. В настоящей работе предпринята попытка устранить данный пробел. На основе методов функционального анализа с помощью специальных топологических средств доказывается существование единственного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения дробного порядка со слабой нелинейностью. Ранее в статье [15] автором были получены достаточные условия разрешимости уравнений с сильной нелинейностью при аналогичных краевых условиях. Полученные здесь результаты дополняют результаты исследований автора, посвященных данной тематике.

1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через C — пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ $(1<p<\infty)$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и через $\mathbb{W}^2$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$D^\alpha_{0+}x(t)+f\left(t,(Tx)(t)\right)=0,\quad 0<t<1, \tag{1.1}$$

$$x(0)=0,\quad x(1)=0, \tag{1.2}$$

где $\alpha\in(1,2]$ — действительное число, D^α_{0+} — дробная производная Римана–Лиувилля, $T\colon C\to\mathbb{L}_p$ $(1<p<\infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1]\times[0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0)\equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *положительным решением* задачи (1.1),(1.2) будем понимать функцию $x\in\mathbb{W}^2$ положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1),(1.2) интегральное уравнение

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)ds,\quad 0\le t\le 1, \tag{1.3}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-D^\alpha_{0+}x(t)$ с краевыми условиями (1.2):

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0\le s\le t,\\[2mm] \dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } t\le s\le 1.\end{cases}$$

Предположим, что функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \le a(t) + bu^{p/q},$$

где $b > 0$, $a(t) \in \mathbb{L}_q$, $q \in (1,\infty)$. Это условие обеспечивает действие оператора Немыцкого $N\colon \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$, определяемого соотношением $(Ny)(t) = f(t, y(t))$ для каждого $y(t) \in \mathbb{L}_p$.

В операторной форме уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где $G\colon \mathbb{L}_q \to C$, $(Gu)(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)u(s)\,ds$ — оператор Грина. Обозначим $A = GNT$. Этот оператор определяется равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\,ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен, вполне непрерывен [16, с. 161] и оставляет инвариантным нормальный конус $\tilde{K}$ неотрицательных функций пространства C, удовлетворяющих граничным условиям (1.2).

Теорема 1.1. *Предположим, что существуют такие неотрицательные функции $\upsilon, \omega \in \mathbb{W}^2$, что справедливы соотношения*

$$\upsilon \le \omega, \quad \upsilon(0) = 0 \le \omega(0), \quad \upsilon(1) = 0 \le \omega(1)$$

и почти всюду на $[0,1]$ выполнены условия

$$-D^{\alpha}_{0+}\upsilon(t) \le f\left(t, (T\upsilon)(t)\right), \quad -D^{\alpha}_{0+}\omega(t) \ge f\left(t, (T\omega)(t)\right).$$

Тогда краевая задача (1.1), (1.2) имеет по крайней мере одно положительное решение на конусном отрезке $\langle \upsilon, \omega \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как несложно убедиться, из соотношений

$$-D^{\alpha}_{0+}\upsilon(t) \le f\left(t, (T\upsilon)(t)\right), \quad \upsilon(0) = 0, \quad \upsilon(1) \le 0,$$

следует, что $A\upsilon \ge \upsilon$. Неравенство $A\omega \le \omega$ получается аналогичным образом.

Тогда, поскольку конус $\tilde{K}$ нормален [17, с. 21] и оператор A, как было выше отмечено, вполне непрерывен, на основании теоремы [17, с. 129] можно заключить, что на $\langle \upsilon, \omega \rangle$ существует по крайней мере одна неподвижная точка оператора A. Последнее в свою очередь равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи (1.1), (1.2). □

Теорема 1.2. *Предположим, что при $u > 0$ и любом $\tau \in (0,1)$*

$$f(t, \tau u) > \tau f(t,u) \quad (t \in (0,1)). \tag{1.4}$$

Тогда при выполнении условий теоремы 1.1 краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное положительное решение на конусном отрезке $\langle \upsilon, \omega \rangle$.

Доказательство. Согласно теореме 1.1 краевая задача (1.1), (1.2) имеет положительное решение на конусном отрезке $\langle v, \omega \rangle$. Докажем единственность этого решения.

Вначале покажем, что оператор Грина G обладает следующим свойством: существует такая ненулевая функция $u_0 \in \tilde{K}$, что для каждой ненулевой неотрицательной функции $u \in \mathbb{L}_q$ можно указать такие числа ς_1, ς_2, что выполнены неравенства

$$\varsigma_1 u_0 \le Gu \le \varsigma_2 u_0 \tag{1.5}$$

(подобные операторы называют u_0-положительными, см. [17, с. 59]). Для любой ненулевой неотрицательной функции $u \in \mathbb{L}_q$ можно указать множество $\Omega_1 \subset [0,1]$ такое, что $u(t) \ge \mu > 0$, $t \in \Omega_1$. В силу соответствующих свойств [?, с. 498] функции Грина рассматриваемой задачи, получим

$$(Gu)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)u(s)\,ds \ge \int\limits_{\Omega_1} \gamma(s)G(s,s)\,ds \cdot \mu \cdot \varphi(t) \quad (t \in [0,1]),$$

где $\gamma(t)$ — положительная непрерывная функция, $\varphi(t) = \min(t, 1-t)$.

С другой стороны, поскольку $G(t,s) \le \dfrac{\varphi^{\alpha-1}(t)}{\Gamma(\alpha)}$, имеем

$$(Gu)(t) = \int_0^1 G(t,s)u(s)\,ds \le \frac{\varphi^{\alpha-1}(t)}{\Gamma(\alpha)}\|u\|_{\mathbb{L}_q} \le \frac{\|u\|_{\mathbb{L}_q}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \varphi(t) \quad (t \in [0,1]).$$

Из полученных неравенств следуют соотношения (1.5) с $u_0(t) \equiv \varphi(t)$, т. е. оператор G является u_0-положительным.

Несложно видеть, что u_0-положительность оператора G обеспечивает u_0-положительность оператору A.

С учетом (1.4) имеем

$$\int_0^1 G(t,s)\big[f(t, \tau\,(Tx)\,(s)) - \tau f(t, (Tx)\,(s))\big]\,ds \ge \beta_1 u_0(t) \quad (t \in [0,1]),$$

где $\beta_1 > 0$. В то же время

$$\int_0^1 G(t,s) f(t, (Tx)\,(s))\,ds \le \beta_2 u_0(t) \quad (t \in [0,1]).$$

Поэтому

$$\int_0^1 G(t,s) f(t, \tau\,(Tx)\,(s))\,ds \ge \tau\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2 \tau}\right)\int_0^1 G(t,s) f(t, (Tx)\,(s))\,ds \quad (t \in [0,1]).$$

Полученное неравенство совпадает с условием u_0-вогнутости оператора A (см. [17, с. 197]), что позволяет воспользоваться теоремой 6.3 из [17, с. 200]. Согласно этой теореме оператор A не может иметь в конусе $\tilde{K}$ две различные неподвижные точки. Следовательно, краевая задача (1.1), (1.2) имеет на конусном отрезке $\langle v, \omega \rangle$ единственное решение. □

П р и м е р 1.1. Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{3/2}x(t)+\frac{4\cdot 3^{0,1}}{\pi}t\left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)^{0,1}=0,\quad 0<t<1, \tag{1.6}$$

$$x(0)=0,\quad x(1)=0. \tag{1.7}$$

Выбрав

$$\upsilon(t)=0,\quad \omega(t)=1-t^2,\quad t\in[0,1],$$

нетрудно проверить выполнение условий вышеприведенных теорем. Таким образом, можно утверждать, что краевая задача (1.6), (1.7) в пределах указанных выше границ конусного отрезка имеет единственное положительное решение.

Заметим, что точным положительным решением задачи (1.6), (1.7) является функция $x(t)=\sqrt{t}-t^2$.

References

[1] X. Xu, D. Jiang, C. Yuan, "Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:10 (2009), 4676–4688.

[2] S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, M. Xu, "Uniqueness of positive solutions for boundary value problems of singular fractional differential equations", *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20**:3 (2012), 299–309.

[3] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, W. Feng, "Positive solutions for a coupled system of nonlinear differential equations of mixed fractional orders", *Advances in Difference Equations*, 2011, № 1, 1–13.

[4] T. Qiu, Z. Bai, "Existence of positive solutions for singular fractional differential equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2008(2008)**:146 (2008), 1–9.

[5] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, "Positive solutions to boundary value problems of nonlinear fractional differential equations", *Abstract and Applied Analysis*, **2011**:217 (2011), 6950–6958.

[6] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, "The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**:4 (2011), 2086–2097.

[7] B. Ahmad, R. P. Agarwal, "Some new versions of fractional boundary value problems with slit-strips conditions", *Boundary Value Problems*, **175** (2014), 1–12.

[8] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, Y. L, "The iterative solutions of nonlinear fractional differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, **219**:9 (2013), 4680–4691.

[9] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, "Existence results for multiple positive solutions of nonlinear higher order perturbed fractional differential equations with derivatives", *Applied Mathematics and Computation*, **219**:4 (2012), 1420–1433.

[10] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, "Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term", *Mathematical and Computer Modelling*, **55**:3–4 (2012), 1263–1274.

[11] Y. Wang, L. Liu, Y. Wu, "Positive solutions for a nonlocal fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **74**:11 (2011), 3599–3605.

[12] Z. Bai, H. Lu, "Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **311**:2 (2005), 495–505.

[13] S. Zhang, "Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2006(2006)**:36 (2006), 1–12.

[14] S. Liang, J. Zhang, "Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:11 (2009), 5545–5550.

[15] Г. Э. Абдурагимов, "О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка", *Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 5*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **194**, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 3–7. [G. E. Abduragimov, "On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order", *Proceedings of the Voronezh spring mathematical school "Modern methods of the theory of boundary-value problems. Pontryagin readings – XXX". Voronezh, May 3-9, 2019. Part 5*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **194**, VINITI, Moscow, 2021, 3–7 (In Russian)].

[16] С. Г. Крейн, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972. [S. G. Krein, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[17] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматгиз, М., 1962; англ. пер.:M. A. Krasnosel'skii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

Информация об авторе

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.
Поступила после рецензирования 20.05.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Gusen E. Abduragimov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Received 17.02.2022
Reviewed 20.05.2022
Accepted for press 09.06.2022